

Modelos de Heteroscedasticidad Condicional

El objetivo de este tema es estudiar algunos métodos estadísticos y modelos econométricos disponibles en la literatura para modelizar la volatilidad del rendimiento de un activo.

Ejemplo: La volatilidad es un elemento muy importante, por ejemplo en el mercado de las opciones. Aquí la volatilidad significa la desviación estándar del rendimiento del activo subyacente. Considérese, por ejemplo, el precio de una opción *call* Europea, la cual es un contrato que da a su poseedor el derecho, pero no la obligación, de comprar un número fijo de acciones de un determinado tipo a un precio fijado en una fecha dada. El precio fijado se denomina el “*strike price*” y se denota comúnmente por K . La fecha dada es denominada fecha de vencimiento (*expiration date*). Aquí el tiempo relevante es cuánto tiempo falta hasta el vencimiento y lo denotamos por t . La fórmula del precio de la opción conocida desde Black-Scholes establece que el precio de tal opción call es

$$c_t = P_t \Phi(x) - K r^{-l} \Phi(x - \sigma_t \sqrt{l}), \text{ donde } x = \frac{\ln(P_t / Kr^{-l})}{\sigma_t \sqrt{l}} + \frac{1}{2} \sigma_t \sqrt{l} \quad (1)$$

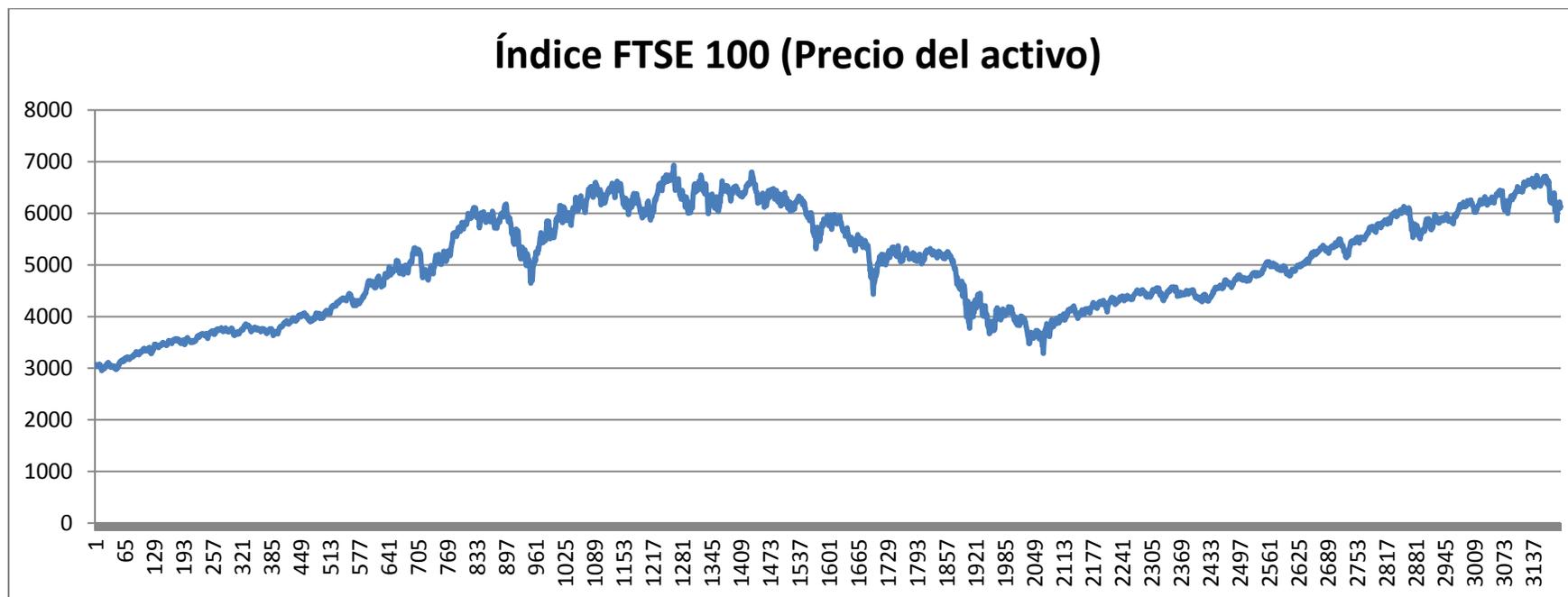
donde P_t es el precio actual del activo subyacente, r es el tipo de interés libre de riesgo, σ_t es la desviación típica condicional del log del rendimiento del activo especificado, y $\Phi(x)$ es la función de distribución de una variable aleatoria normal estándar evaluada en x . Esta fórmula contiene como un factor determinante del precio de la opción la desviación típica condicional del rendimiento del activo subyacente. Esta volatilidad que evoluciona a lo largo del tiempo es el objeto de estudio de este tema.

La volatilidad tiene muchas otras aplicaciones financieras. Modelizar la volatilidad proporciona un simple enfoque para calcular el *Valor en riesgo* (*value at risk*) de una posición financiera en la gestión de riesgos (*Mide la posible pérdida máxima esperada durante un determinado intervalo de tiempo, bajo condiciones normales del mercado y dentro de un nivel de confianza establecido.*); también juega un importante papel en la asignación de activos bajo una estructura media-varianza; además, modelizar la volatilidad de una serie temporal puede mejorar la eficiencia en la estimación de los parámetros y, por tanto, las bandas de confianza de las predicciones. Por último, el índice de volatilidad de un mercado se ha convertido recientemente en un instrumento financiero (*VIX volatility index*).

Los modelos que hemos analizado hasta ahora mantenían el supuesto de que la innovación tiene una varianza constante en el tiempo.

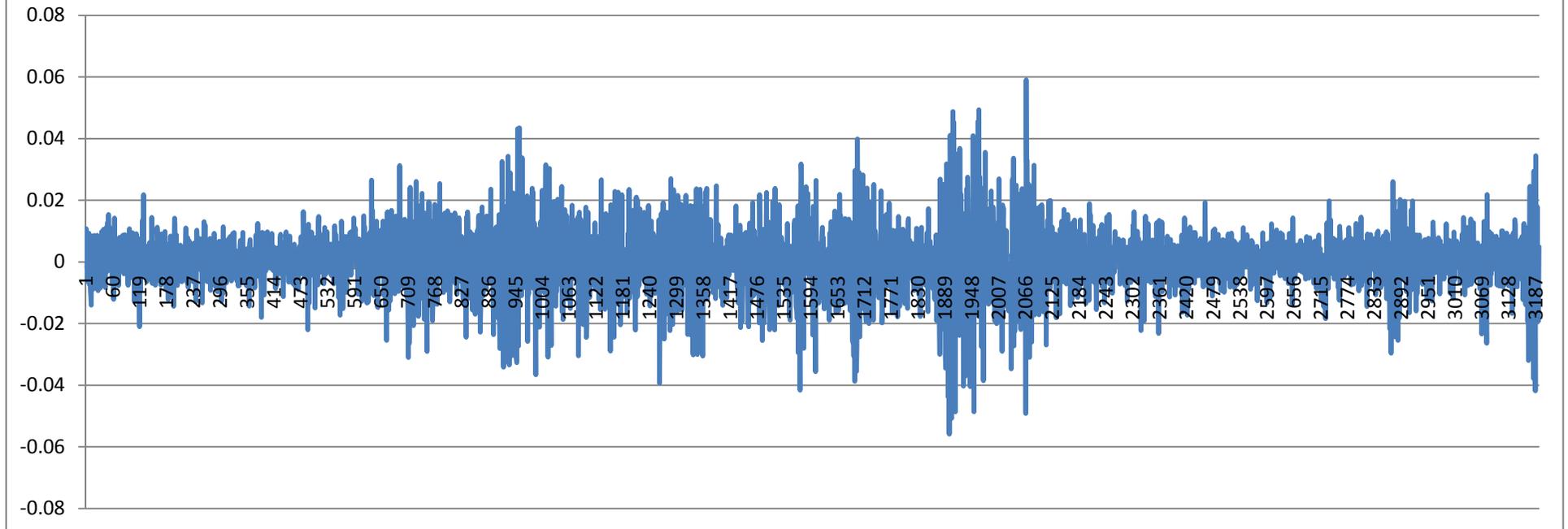
Sin embargo, para agentes aversos al riesgo, que toman sus decisiones en un régimen de incertidumbre, la varianza condicional, es decir, la varianza de la distribución de los rendimientos en cada instante futuro de tiempo, juega un importante papel. Este es el aspecto que modelizamos en este tema. Los modelos ARCH aparecen en los años 80 con el objeto de recoger los episodios de agrupamiento temporal de volatilidad que suele observarse en las series de rentabilidad de casi todo el mercado financiero. Desde entonces, su variedad y su aplicación práctica han crecido de manera espectacular.

Ejemplo: FTSE 100¹ (datos diarios desde el 3 de enero de 1997 hasta el 29 de agosto de 2007)

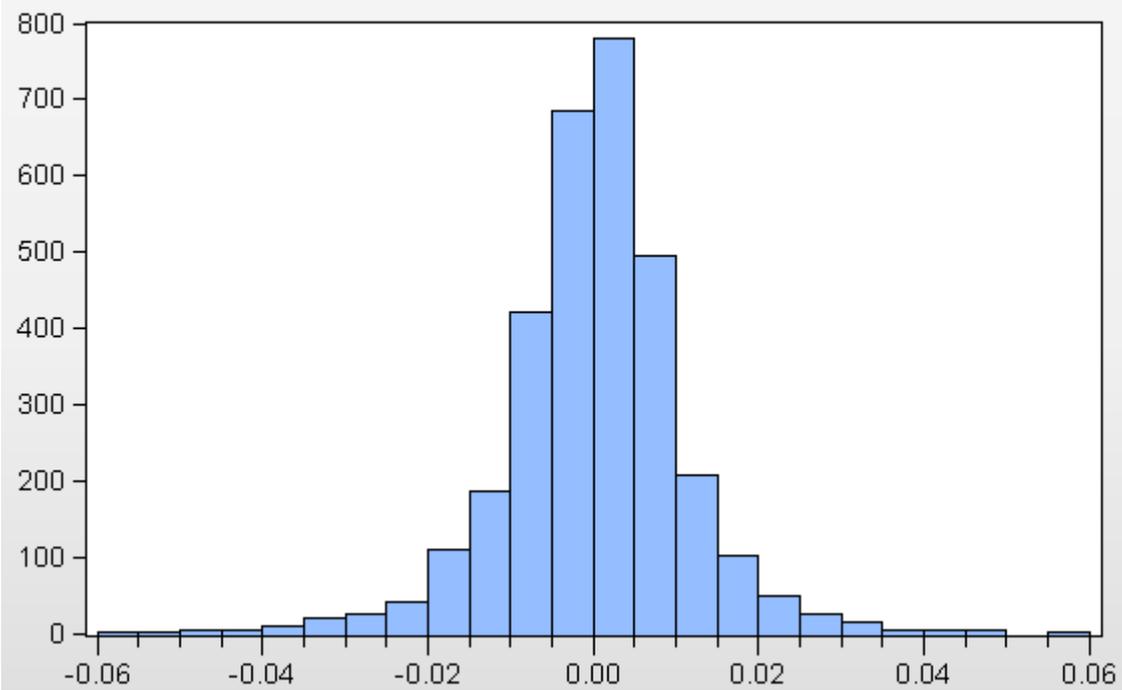


¹ El índice FTSE 100, pronunciado popularmente como Footsie 100, es publicado por el Financial Times. Lo componen los 100 principales valores de la Bolsa de Londres (London Stock Exchange). FTSE es un acrónimo de Financial Times Stock Exchange. El principal indicador del FTSE 100 es el FTSE 100 Index. El índice fue desarrollado con un nivel base de 1000 a fecha 3 de enero de 1984. La capitalización de las empresas que componen el índice supone el 70% del valor total del mercado de valores de Londres. Los valores ponderan por el criterio de capitalización. Se revisa trimestralmente, el primer viernes de marzo, junio, septiembre y diciembre. Las sesiones se desarrollan de lunes a viernes.

Variación Logarítmica del FTSE 100 (Rendimiento logarítmico del activo)

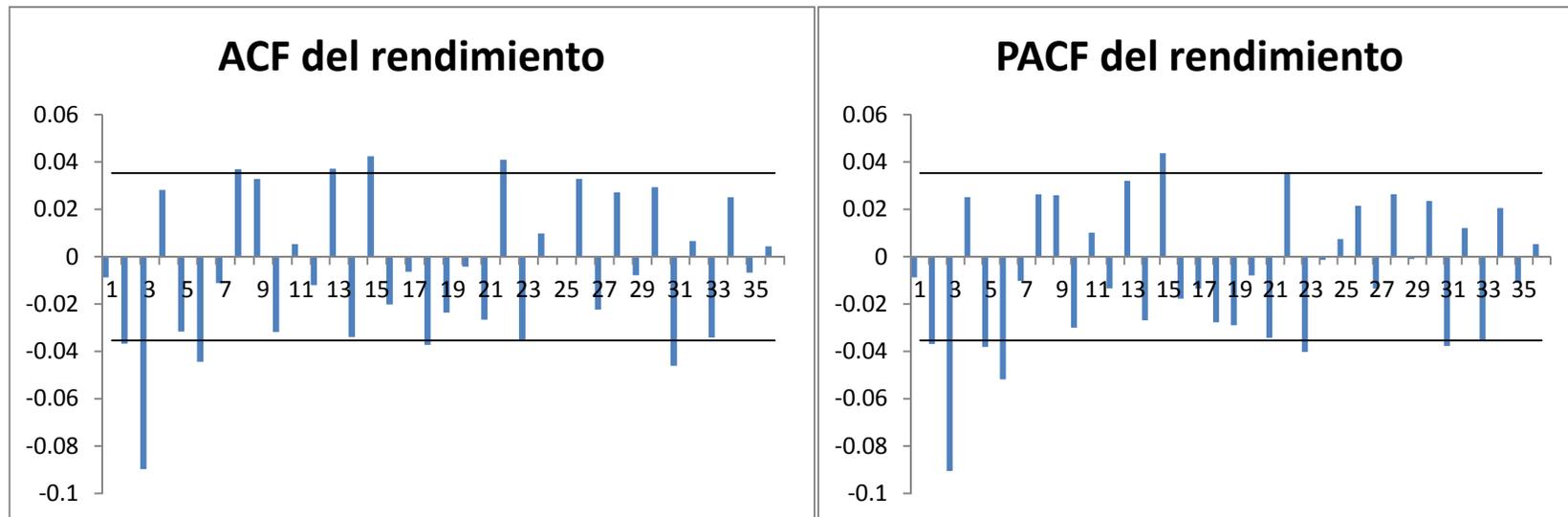


Las características estadísticas de la serie de rendimientos quedan resumidas en la siguiente figura:

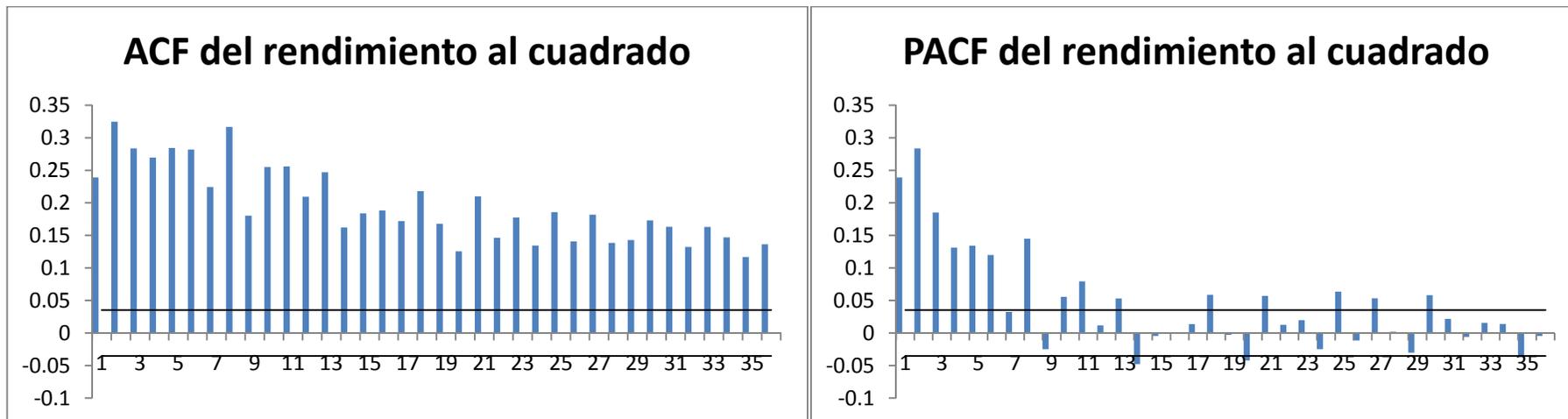


Series: R	
Sample 1 3197	
Observations 3196	
Mean	0.000217
Median	0.000560
Maximum	0.059038
Minimum	-0.055888
Std. Dev.	0.010683
Skewness	-0.180915
Kurtosis	5.857092
Jarque-Bera	1104.471
Probability	0.000000

A continuación presentamos las funciones de autocorrelación simple y parcial de la serie de rendimientos:



Éstas son las funciones de autocorrelación simple y parcial de los rendimientos al cuadrado.



Las características más relevantes de las series financieras recogidas con frecuencias elevadas son:

- 1) ausencia de estructura regular dinámica en la media, lo que aparece reflejado en estadísticos Ljung-Box generalmente no significativos,
- 2) distribuciones leptocúrticas o exceso de apuntamiento,
- 3) suelen ser simétricas, aunque también se encuentran en algunos casos coeficientes de asimetría significativamente distintos de cero,
- 4) agrupamiento de la volatilidad sobre intervalos de tiempo, lo cual se refleja en funciones de autocorrelación simple significativas para los cuadrados de las variables,
- 5) persistencia en volatilidad: los efectos de un shock en volatilidad tardan un tiempo en desaparecer,
- 6) efecto apalancamiento: se observa una respuesta asimétrica de la volatilidad al nivel de los rendimientos.

Muchos de estos efectos quedan recogidos en los modelos ARCH, GARCH, y EGARCH, que vamos a analizar. Estos modelos recogen en sus formulaciones la idea de que existen agrupaciones de volatilidad, es decir, que fuertes fluctuaciones inesperadas en los mercados tienden a venir seguidas de periodos de iguales características, mientras que períodos de estabilidad tienden a venir seguidos de períodos asimismo estables. Los modelos de esta familia recogen este comportamiento inercial en volatilidad a la vez que el comportamiento dinámico con autocorrelación que suelen presentar las series financieras.

Una de las contribuciones importantes de la literatura de procesos ARCH es mostrar que las variaciones que aparentemente se producen en la volatilidad de las series temporales económicas pueden explicarse mediante una determinada forma de dependencia no lineal, que permite además predecir dichos cambios en volatilidad sin necesidad de recurrir a la modelización explícita de cambios estructurales en la varianza.

Una característica especial de la volatilidad de las acciones es que no es directamente observable. En breve, esto quedará más claro.

Dado que los modelos de volatilidad utilizan los conceptos de media y varianza condicional de los rendimientos r_t dado el conjunto de información Ω_{t-1} , definamos tales conceptos como sigue:

$$\begin{aligned} \text{Esperanza Condicional: } \mu_t &= E(r_t | \Omega_{t-1}) \\ \text{Varianza Condicional: } \sigma_t^2 &= E[(r_t - \mu_t)^2 | \Omega_{t-1}] \end{aligned} \quad (2)$$

Suponemos que r_t sigue un simple modelo de series temporales univariantes (ARMA(p, q)), con algunas variables explicativas (como por ejemplo, variables *dummy* para recoger el efecto lunes o el efecto enero, ...):

$$r_t = \mu_t + a_t, \quad \mu_t = \phi_0 + \sum_{i=1}^p \phi_i \mu_{t-i} - \sum_{i=1}^q \theta_i a_{t-i} + \sum_{i=1}^k \beta_i x_{i,t} \quad (3)$$

Combinando (2) y (3) tenemos que:

$$\sigma_t^2 = \text{Var}(r_t | \Omega_{t-1}) = \text{Var}(a_t | \Omega_{t-1}) \quad (4)$$

Los modelos de heteroscedasticidad condicional que vamos a ver determinan la evolución de σ_t .

En lo que sigue, a_t será el *shock* o la *innovación* del rendimiento de un activo en el periodo t y σ_t será la raíz positiva de σ_t^2 . Nos referiremos al modelo para μ_t en la ecuación (3) como la ecuación para la media de r_t y al modelo para σ_t^2 como la ecuación de la volatilidad de r_t .

CÓMO CONSTRUIMOS UN MODELO DE HETEROSCEDASTICIDAD CONDICIONAL

1. Especificamos una ecuación para la media (usando los instrumentos típicos de identificación de modelos ARMA), para eliminar cualquier dependencia lineal de los rendimientos.
2. Usamos los residuos de la ecuación de la media para contrastar la existencia de efectos ARCH (*Autoregressive Conditional Heteroscedastic*).
3. Especificamos un modelo de volatilidad si los efectos ARCH son estadísticamente significativos y llevamos a cabo una estimación conjunta de las ecuaciones para la media y para la volatilidad.
4. Chequeamos el ajuste del modelo y lo refinamos si es necesario (Diagnosis).

CÓMO CONTRASTAMOS LOS EFECTOS ARCH

Para facilitar la notación, supongamos que $a_t = r_t - \mu_t$ es el residuo del periodo t de la ecuación de la media. Los cuadrados de los residuos (a_t^2) se utilizan para contrastar la heteroscedasticidad condicional, esto es, si existen efectos ARCH. Existen dos tipos de contrastes:

- i) Aplicar el estadístico Ljung-Box [$Q(m)$] sobre la función de autocorrelación simple de a_t^2 , que contrasta la hipótesis nula de que los primeros m retardos de la ACF son cero.

- ii) Usar el test del multiplicador de Lagrange de Engle. Este test es equivalente al estadístico usual F que contrasta $\alpha_i = 0, i = 1, 2, \dots, m$ en la regresión lineal:

$$a_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \dots + \alpha_m a_{t-m}^2 + e_t, \quad t = m+1, \dots, T$$

donde e_t denota el término de error, m es un entero positivo pre-especificado, y T es el tamaño muestral. Específicamente, la hipótesis nula es $H_0 : \alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0$. Sea

$SSR_0 = \sum_{t=m+1}^T (a_t^2 - \bar{a})^2$, donde $\bar{a} = (1/T) \sum_{t=1}^T a_t^2$ es la media muestral de a_t , y

$SSR_1 = \sum_{t=m+1}^T \hat{e}_t^2$, siendo \hat{e}_t los residuos estimados por MCO de la regresión especificada

antes. Entonces, el estadístico F tomará la forma

$$F = \frac{(SSR_0 - SSR_1) / m}{SSR_1 / (T - 2m - 1)}$$

el cual se distribuye asintóticamente como una chi-cuadrado con m grados de libertad bajo la hipótesis nula. La regla de decisión es rechazar la hipótesis nula si $F > \chi_m^2(\alpha)$ donde $\chi_m^2(\alpha)$ es el percentil $100 \times (1 - \alpha)$ de χ_m^2 , o el p -valor de F es menor que α .

EL MODELO ARCH

La idea básica de los modelos ARCH es que:

- i) El shock a_t del rendimiento de un activo está serialmente incorrelacionado, pero es dependiente; y
- ii) La dependencia de a_t puede ser descrita mediante una simple función cuadrática de sus retardos.

Específicamente, un ARCH(m) supone que

$$a_t = \sigma_t \varepsilon_t, \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i a_{t-i}^2, \varepsilon_t \underset{iid}{\sim} N(0,1) \quad (5)$$
$$\alpha_0 > 0, \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^m \alpha_i < 1.$$

Aunque ε_t también puede seguir una t de Student estandarizada.

PROPIEDADES DE LOS MODELOS ARCH

Para entender mejor sus propiedades vamos a analizar el modelo ARCH(1):

$$a_t = \sigma_t \varepsilon_t, \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2$$

donde $\alpha_0 > 0$, $\alpha_1 \geq 0$.

1) **La esperanza incondicional de a_t es cero:**

$$\begin{aligned} E(a_t) &\stackrel{\substack{= \\ \text{Ley de} \\ \text{expectativas} \\ \text{iteradas}}}{=} E\left[E(a_t | \Omega_{t-1})\right] = E\left[E(\sigma_t \varepsilon_t | \Omega_{t-1})\right] \\ &= E\left[\sigma_t \underbrace{E(\varepsilon_t | \Omega_{t-1})}_{=0}\right] = 0 \end{aligned}$$

2) La varianza incondicional de a_t es:

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(a_t) &= E(a_t^2) = E\left[E(a_t^2 \mid \Omega_{t-1})\right] \\
 &= E(\alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2) \\
 &= \alpha_0 + \alpha_1 E(a_{t-1}^2)
 \end{aligned}$$

 \Rightarrow

Estacionariedad \Rightarrow
 $E(a_t) = E(a_{t-1}) = 0$, y
 $\text{Var}(a_t) = \text{Var}(a_{t-1}) = E(a_{t-1}^2)$

$$\text{Var}(a_t) = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1} > 0 \Rightarrow \alpha_1 \in [0, 1).$$

3) Como queremos que los momentos de orden superior de a_t existan debemos incorporar alguna restricción adicional sobre el parámetro α_1 . Por ejemplo, para estudiar el comportamiento de las colas de la distribución, requerimos que el cuarto momento de a_t sea finito; bajo el supuesto de normalidad de ε_t , tenemos que:

$$\begin{aligned}
 E(a_t^4 | \Omega_{t-1}) &= E[\sigma_t^4 \varepsilon_t^4 | \Omega_{t-1}] = E[\sigma_t^4 | \Omega_{t-1}] E(\varepsilon_t^4) \frac{[E(\varepsilon_t^2)]^2}{[E(\varepsilon_t^2)]^2} = \\
 &= 3E[\sigma_t^4 | \Omega_{t-1}] [E(\varepsilon_t^2)]^2 \\
 &\geq 3E[\sigma_t^2 \varepsilon_t^2 | \Omega_{t-1}]^2 = 3[E(a_t^2 | \Omega_{t-1})]^2 = 3(\alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2)^2 \quad \Rightarrow \\
 &\hspace{15em} \text{Ley de} \\
 &\hspace{15em} \text{expectativas} \\
 &\hspace{15em} \text{iteradas} \\
 \Rightarrow E(a_t^4) &= E[E(a_t^4 | \Omega_{t-1})] \geq E[3(\alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2)^2] = 3E[\alpha_0^2 + 2\alpha_0 \alpha_1 a_{t-1}^2 + \alpha_1^2 a_{t-1}^4] = \\
 &\hspace{15em} = 3\alpha_0^2 \left(1 + 2\frac{\alpha_1}{1 - \alpha_1}\right) + 3\alpha_1^2 E(a_{t-1}^4) \quad \Rightarrow \\
 &\hspace{15em} \text{Estacionariedad}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow E(a_t^4) \geq \frac{3\alpha_0^2(1 + \alpha_1)}{(1 - \alpha_1)(1 - 3\alpha_1^2)}$$

Este resultado tiene dos implicaciones: a) ya que el cuarto momento de a_t debe ser positivo, el parámetro α_1 debe satisfacer la condición: $0 \leq \alpha_1^2 \leq 1/3$; y b) la kurtosis incondicional de a_t debe ser:

$$\frac{E(a_t^4)}{[E(a_t^2)]^2} \geq \frac{3\alpha_0^2(1+\alpha_1)}{(1-\alpha_1)(1-3\alpha_0^2)} \times \left(\frac{1-\alpha_1}{\alpha_0}\right)^2 = 3\frac{1-\alpha_1^2}{1-3\alpha_0^2} > 3.$$

Por tanto, el exceso de kurtosis y las colas más pesadas de a_t respecto de la distribución normal también caracterizan el comportamiento estocástico de las series temporales financieras.

DEBILIDADES DE LOS MODELOS ARCH

1. El modelo supone que los shocks positivos y negativos tienen los mismos efectos sobre volatilidad porque ésta depende de los cuadrados de los shocks previos. En la práctica, es bien conocido que el precio de un activo financiero responde de forma diferente ante shocks negativos y positivos.
2. El modelo ARCH es bastante restrictivo: por ejemplo, α_1^2 debe estar entre cero y 1/3 para que el cuarto momento sea finito en un ARCH(1). En la práctica, esto limita la capacidad de los modelos ARCH con innovaciones normales para capturar el exceso de curtosis observado en los datos.
3. El modelo ARCH no aporta una nueva visión para entender la fuente de variaciones de una serie temporal financiera. Simplemente proporciona una manera mecánica de describir el comportamiento de la varianza condicional.
4. Los modelos ARCH suelen “sobre-predecir” la volatilidad porque responden lentamente a grandes shocks aislados en el rendimiento de las series.

Construcción de un modelo ARCH

- **Determinación del orden:** si encontramos un efecto ARCH significativo, podemos utilizar la PACF de a_t^2 para determinar el orden del ARCH. Para justificar este procedimiento, del modelo (5) se tiene que:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \dots + \alpha_m a_{t-m}^2.$$

Para una muestra dada, a_t^2 es un estimador insesgado de σ_t^2 . Por tanto, esperamos que a_t^2 esté linealmente relacionado con $a_{t-1}^2, \dots, a_{t-m}^2$ de manera similar a la de un modelo autorregresivo de orden m . Nótese que a_t^2 no es generalmente un estimador eficiente de σ_t^2 , pero puede servir como una aproximación que podría ser informativa al especificar el orden m .

Alternativamente, definamos $\eta_t = a_t^2 - \sigma_t^2$. Puede demostrarse que $\{\eta_t\}$ es una serie no autocorrelacionada con media cero. El modelo ARCH entonces es:

$$a_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \dots + \alpha_m a_{t-m}^2 + \eta_t,$$

que está escrito en la forma de un AR(m) para a_t^2 , excepto por el hecho de que $\{\eta_t\}$ no es una serie idéntica e independientemente distribuida. Esto sólo implica que, en muestras cortas la PACF puede no sea efectiva para determinar el orden del ARCH.

- **Estimación**

Bajo el supuesto de normalidad, la función de verosimilitud de un ARCH(m) es:

$$\begin{aligned} f(a_1, \dots, a_T | \boldsymbol{\alpha}) &= f(a_T | \Omega_{T-1}) f(a_{T-1} | \Omega_{T-2}) \cdot \dots \cdot f(a_{m+1} | \Omega_m) f(a_1, \dots, a_m | \boldsymbol{\alpha}) \\ &= \prod_{t=m+1}^T \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}} e^{-\frac{a_t^2}{2\sigma_t^2}} \times f(a_1, \dots, a_m | \boldsymbol{\alpha}), \end{aligned}$$

donde $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m)'$ y $f(a_1, \dots, a_m | \boldsymbol{\alpha})$ es la densidad de probabilidad conjunta de a_1, \dots, a_m . Ya que la forma exacta de $f(a_1, \dots, a_m | \boldsymbol{\alpha})$ es complicada, se suele eliminar de la función de verosimilitud sobre todo si la muestra es grande. Así tenemos la función de verosimilitud condicional:

$$f(a_1, \dots, a_T | \boldsymbol{\alpha}, a_1, \dots, a_m) = \prod_{t=m+1}^T \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}} e^{-\frac{a_t^2}{2\sigma_t^2}},$$

donde σ_t^2 puede ser evaluado recursivamente. Así, los parámetros serán estimados como sigue:

$$\underset{\mathbf{a}}{\text{Max}} f(a_{m+1}, \dots, a_T | \mathbf{a}, a_1, \dots, a_T) \Leftrightarrow \underset{\mathbf{a}}{\text{Max}} \ln[f(a_{m+1}, \dots, a_T | \mathbf{a}, a_1, \dots, a_T)] \Leftrightarrow$$

$$\underset{\mathbf{a}}{\text{Max}} \ell(a_{m+1}, \dots, a_T | \mathbf{a}, a_1, \dots, a_T) = \sum_{t=m+1}^T \left(-\frac{1}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln(\sigma_t^2) - \frac{1}{2} \frac{a_t^2}{\sigma_t^2} \right).$$

Ya que el primer término del sumatorio no implica ningún parámetro a estimar, la estimación de los parámetros por máxima verosimilitud se reduce a

$$\underset{\mathbf{a}}{\text{Max}} \ell(a_{m+1}, \dots, a_T | \mathbf{a}, a_1, \dots, a_T) = - \sum_{t=m+1}^T \left(\ln(\sigma_t^2) + \frac{a_t^2}{\sigma_t^2} \right),$$

donde $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \dots + \alpha_m a_{t-m}^2$ será evaluado recursivamente.

- **Diagnosis**

Para un modelo ARCH especificado apropiadamente, los residuos estandarizados $\tilde{a}_t = \frac{a_t}{\sigma_t}$ forman una secuencia de variables aleatorias *iid*. Por tanto, podemos chequear el ajuste del modelo ARCH especificado examinando la serie $\{\tilde{a}_t\}$. En particular, el estadístico Ljung-Box sobre \tilde{a}_t puede usarse para chequear el ajuste de la ecuación para la media y el Ljung-Box sobre \tilde{a}_t^2 puede usarse para chequear el ajuste de la ecuación de la volatilidad. Por último, estudiando el histograma y el contraste Bera-Jarque de los residuos estandarizados podemos chequear la validez del supuesto de normalidad elegido en la maximización de la verosimilitud.

- **Predicción**

Las predicciones del modelo ARCH pueden obtenerse recursivamente como las de un modelo AR. Sea el modelo ARCH(m). Siendo el origen de predicción h , la predicción un periodo hacia delante de σ_{h+1}^2 es:

$$\sigma_h^2(1) = \alpha_0 + \alpha_1 a_h^2 + \dots + \alpha_m a_{h+1-m}^2 .$$

La predicción dos periodos hacia adelante será:

$$\sigma_h^2(2) = \alpha_0 + \alpha_1 \sigma_h^2(1) + \alpha_2 a_h^2 + \dots + \alpha_m a_{h+2-m}^2 ,$$

Y la predicción ℓ periodos hacia adelante para $\sigma_{h+\ell}^2$ es

$$\sigma_h^2(\ell) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i \sigma_h^2(\ell - i)$$

donde $\sigma_h^2(\ell - i) = a_{h+\ell-i}^2$ si $\ell - i \leq 0$.

Ejemplo: Rendimientos del FTSE 100.

Correlograma de los rendimientos al cuadrado:

Sample: 1 3197

Included observations: 3196

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.239	0.239	182.70	0.000
		2	0.325	0.284	520.01	0.000
		3	0.284	0.185	777.87	0.000
		4	0.270	0.131	1010.7	0.000
		5	0.284	0.134	1269.7	0.000
		6	0.282	0.120	1524.3	0.000
		7	0.224	0.033	1685.6	0.000
		8	0.317	0.145	2007.1	0.000
		9	0.180	-0.025	2111.4	0.000
		10	0.255	0.055	2320.2	0.000
		11	0.256	0.079	2530.3	0.000
		12	0.209	0.012	2671.0	0.000
		13	0.247	0.053	2867.1	0.000
		14	0.162	-0.048	2951.5	0.000
		15	0.184	-0.005	3059.9	0.000
		16	0.188	-0.000	3174.0	0.000
		17	0.172	0.014	3268.9	0.000
		18	0.218	0.059	3421.9	0.000
		19	0.168	-0.003	3512.6	0.000
		20	0.126	-0.042	3563.4	0.000
		21	0.210	0.057	3705.3	0.000
		22	0.146	0.013	3774.4	0.000
		23	0.178	0.020	3876.0	0.000
		24	0.134	-0.025	3934.2	0.000
		25	0.186	0.064	4045.6	0.000
		26	0.141	-0.012	4109.3	0.000
		27	0.182	0.053	4215.9	0.000
		28	0.139	0.002	4277.9	0.000
		29	0.143	-0.030	4343.7	0.000
		30	0.173	0.058	4440.2	0.000
		31	0.163	0.022	4526.3	0.000
		32	0.132	-0.006	4582.8	0.000
		33	0.163	0.016	4668.6	0.000
		34	0.147	0.014	4738.4	0.000
		35	0.117	-0.037	4782.5	0.000
		36	0.136	-0.005	4842.6	0.000

Estimación de un ARCH(9):

Dependent Variable: R

Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution

Date: 11/20/16 Time: 21:07

Sample (adjusted): 2 3197

Included observations: 3196 after adjustments

Convergence achieved after 12 iterations

Presample variance: backcast (parameter = 0.7)

GARCH = C(2) + C(3)*RESID(-1)^2 + C(4)*RESID(-2)^2 + C(5)*RESID(-3)^2
 + C(6)*RESID(-4)^2 + C(7)*RESID(-5)^2 + C(8)*RESID(-6)^2 + C(9)
 *RESID(-7)^2 + C(10)*RESID(-8)^2 + C(11)*RESID(-9)^2

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	0.000461	0.000138	3.353039	0.0008

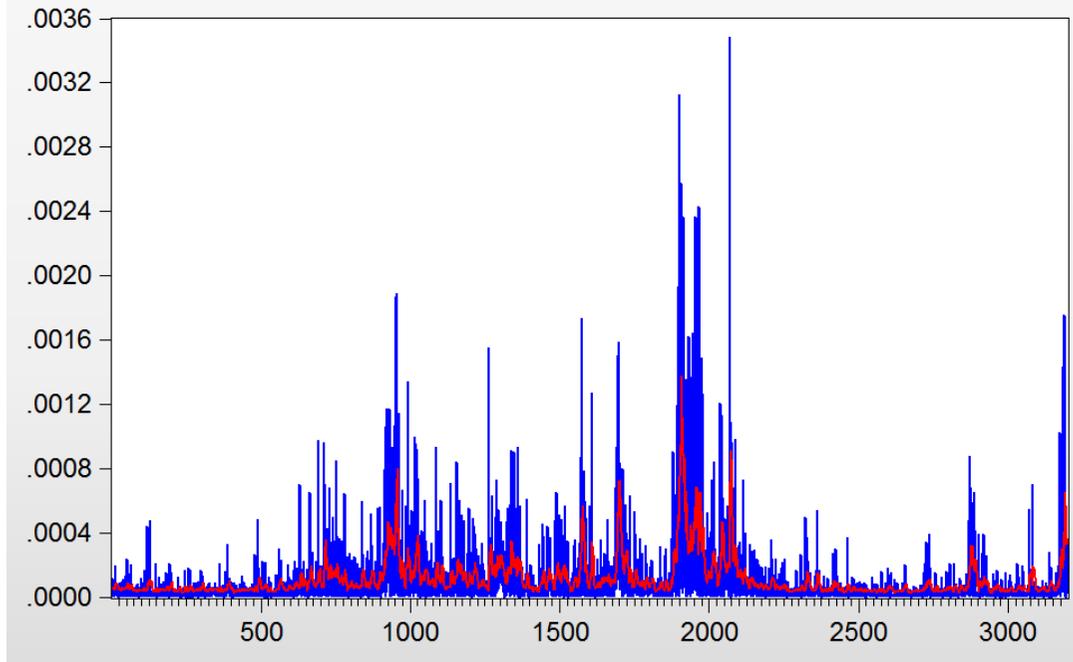
Variance Equation				
C	2.09E-05	1.92E-06	10.88648	0.0000
RESID(-1)^2	0.088610	0.015989	5.541807	0.0000
RESID(-2)^2	0.112742	0.022359	5.042458	0.0000
RESID(-3)^2	0.107544	0.024584	4.374585	0.0000
RESID(-4)^2	0.100113	0.020493	4.885168	0.0000
RESID(-5)^2	0.079547	0.022266	3.572549	0.0004
RESID(-6)^2	0.122108	0.022853	5.343219	0.0000
RESID(-7)^2	0.066676	0.020076	3.321203	0.0009
RESID(-8)^2	0.108142	0.023604	4.581485	0.0000
RESID(-9)^2	0.033178	0.016567	2.002642	0.0452

R-squared	-0.000523	Mean dependent var	0.000217
Adjusted R-squared	-0.000523	S.D. dependent var	0.010683
S.E. of regression	0.010686	Akaike info criterion	-6.553853
Sum squared resid	0.364812	Schwarz criterion	-6.532963
Log likelihood	10484.06	Hannan-Quinn criter.	-6.546363
Durbin-Watson stat	2.016318		

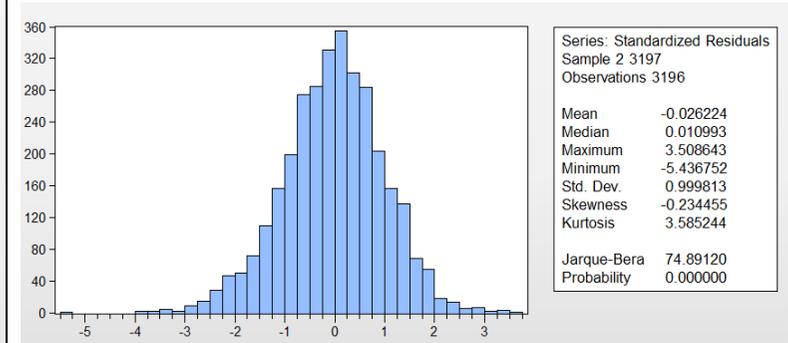
Correlograma de los residuos y de los residuos al cuadrado

Sample: 1 3197 Included observations: 3196							Sample: 1 3197 Included observations: 3196						
Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob*		Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob*	
		1	0.008	0.008	0.2285	0.633			1	0.010	0.010	0.2984	0.585
		2	-0.022	-0.022	1.7759	0.412			2	-0.007	-0.007	0.4679	0.791
		3	-0.037	-0.036	6.0415	0.110			3	-0.019	-0.019	1.6239	0.654
		4	-0.007	-0.007	6.2165	0.184			4	-0.023	-0.023	3.3067	0.508
		5	-0.022	-0.024	7.7980	0.168			5	-0.014	-0.014	3.9124	0.562
		6	-0.023	-0.024	9.4891	0.148			6	-0.021	-0.021	5.2823	0.508
		7	-0.022	-0.023	10.971	0.140			7	-0.015	-0.016	6.0039	0.539
		8	-0.003	-0.005	10.993	0.202			8	-0.010	-0.011	6.3424	0.609
		9	0.017	0.014	11.897	0.219			9	-0.038	-0.040	11.068	0.271
		10	0.001	-0.002	11.900	0.292			10	0.040	0.038	16.099	0.097
		11	0.020	0.019	13.122	0.285			11	0.050	0.047	23.962	0.013
		12	0.006	0.005	13.235	0.352			12	0.001	-0.002	23.969	0.021
		13	0.006	0.005	13.334	0.422			13	-0.018	-0.019	25.063	0.023
		14	-0.041	-0.040	18.774	0.174			14	-0.017	-0.015	26.007	0.026
		15	0.002	0.004	18.791	0.223			15	0.012	0.013	26.454	0.034
		16	-0.011	-0.011	19.155	0.261			16	0.012	0.013	26.948	0.042
		17	-0.012	-0.013	19.617	0.294			17	0.019	0.020	28.153	0.043
		18	-0.008	-0.008	19.840	0.342			18	0.018	0.018	29.218	0.046
		19	-0.007	-0.010	20.018	0.393			19	0.001	0.005	29.222	0.063
		20	0.002	-0.001	20.031	0.456			20	-0.007	-0.004	29.374	0.081
		21	-0.016	-0.019	20.816	0.470			21	0.003	0.001	29.408	0.105
		22	0.018	0.016	21.828	0.470			22	0.009	0.008	29.698	0.126
		23	-0.023	-0.025	23.516	0.431			23	0.017	0.019	30.663	0.131
		24	-0.018	-0.020	24.584	0.429			24	0.020	0.026	32.017	0.127
		25	0.018	0.019	25.572	0.431			25	0.027	0.030	34.385	0.100
		26	0.011	0.007	25.934	0.467			26	0.012	0.012	34.819	0.116
		27	-0.022	-0.022	27.505	0.437			27	0.023	0.024	36.533	0.104
		28	0.013	0.013	28.051	0.462			28	0.012	0.012	37.008	0.119
		29	-0.005	-0.006	28.146	0.510			29	-0.005	-0.003	37.085	0.144
		30	0.038	0.037	32.920	0.326			30	0.026	0.032	39.304	0.119
		31	-0.016	-0.018	33.760	0.335			31	0.012	0.019	39.800	0.134
		32	-0.003	-0.000	33.789	0.381			32	0.017	0.021	40.692	0.139
		33	-0.013	-0.012	34.374	0.402			33	0.017	0.020	41.667	0.143
		34	0.007	0.006	34.540	0.442			34	0.038	0.040	46.292	0.078
		35	0.005	0.004	34.610	0.487			35	0.022	0.022	47.889	0.072
		36	0.002	0.003	34.619	0.534			36	0.032	0.035	51.103	0.049

Rendimientos al cuadrado y volatilidad estimada

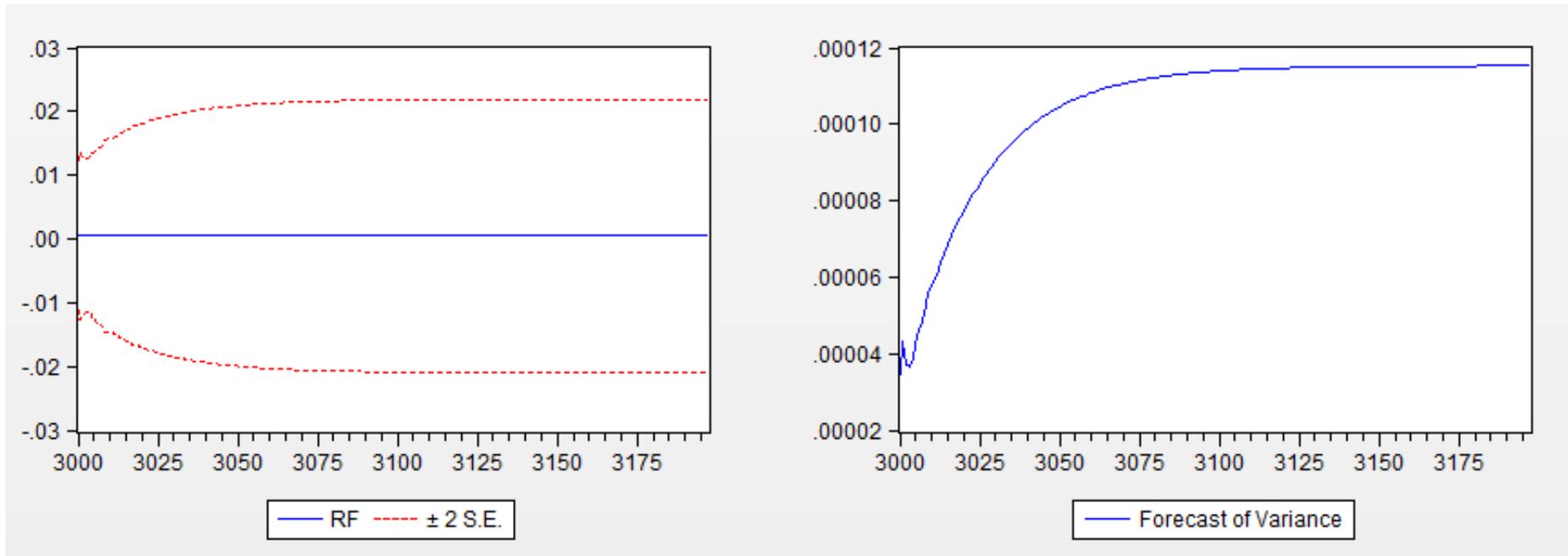


Histograma de los residuos



En azul los rendimientos al cuadrado; en rojo la varianza condicional estimada.

Predicción para la media y la varianza de los últimos 197 datos:



EL MODELO GARCH

Aunque el modelo ARCH es simple, a menudo requiere muchos parámetros para describir adecuadamente la volatilidad del proceso que sigue el rendimiento de un activo. Para una serie de rendimientos de un activo r_t , sea $a_t = r_t - \mu_t$ la innovación en el periodo t . Entonces a_t sigue un GARCH(m,s) si

$$a_t = \sigma_t \varepsilon_t, \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^s \beta_j \sigma_{t-j}^2 \quad (5)$$

donde $\varepsilon_t \underset{iid}{\sim} N(0,1)$, $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0$, $\beta_j \geq 0$, $\sum_{i=1}^{\max\{m,s\}} (\alpha_i + \beta_i) < 1$.

Esta última restricción implica que la varianza incondicional de a_t es finita.

También ε_t puede seguir una distribución t de student.

α_i : parámetros ARCH

β_j : parámetros GARCH

Para entender las propiedades de los modelos GARCH, es informativo usar la siguiente representación. Sea $\eta_t = a_t^2 - \sigma_t^2$. Sustituyendo esta expresión en (5) se tiene:

$$a_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{\max\{m,s\}} (\alpha_i + \beta_i) a_{t-i}^2 + \eta_t - \sum_{j=1}^s \beta_j \eta_{t-j} \quad (6)$$

Es fácil ver que η_t se caracteriza por que $E(\eta_t) = 0$, $\text{cov}(\eta_t, \eta_{t-j}) = 0$, para $j \geq 1$ pero no es una secuencia iid. La ecuación (6) es una especie de ARMA para a_t^2 . Usando el resultado de los modelos ARMA, podemos inferir que la media incondicional de a_t^2 es

$$E(a_t^2) = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{i=1}^{\max\{m,s\}} (\alpha_i + \beta_i)}$$

GARCH(1,1)

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2, \alpha_0 > 0, 0 \leq \alpha_1, \beta_1 \leq 1, \alpha_1 + \beta_1 \leq 1. \quad (7)$$

Características:

- 1) Un valor grande de a_{t-1}^2 o de σ_{t-1}^2 le sigue un valor grande de σ_t^2 : esto significa que valores altos de a_{t-1}^2 le siguen valores altos de a_t^2 .
- 2) Puede demostrarse que:

$$\frac{E(a_t^2)}{[E(a_t^2)]^2} = \frac{3[1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2]}{1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2 - 2\alpha_1^2} > 3$$

Como en los modelos ARCH, la distribución de las colas de un GARCH(1,1) es más pesada que la de una distribución normal.

- 3) Este modelo proporciona una función paramétrica simple que puede ser usada para describir la evolución de la volatilidad.

Las **predicciones** de un modelo GARCH pueden obtenerse usando métodos similares a los de un modelo ARMA. Sea el modelo (7) y supongamos que el origen de la predicción es h . Para la predicción un periodo hacia adelante se tiene que

$$\sigma_{h+1}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_h^2 + \beta_1 \sigma_h^2,$$

donde a_h^2 y σ_h^2 son conocidos en el periodo h . Por tanto, la predicción un periodo hacia adelante es:

$$\sigma_h^2(1) = \alpha_0 + \alpha_1 a_h^2 + \beta_1 \sigma_h^2.$$

Para predicciones a horizontes de predicción mayores, utilizamos $a_t^2 = \sigma_t^2 \varepsilon_t^2$ y reescribimos la ecuación de volatilidad como:

$$\sigma_{t+1}^2 = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1)\sigma_t^2 + \alpha_1\sigma_t^2(\varepsilon_t^2 - 1).$$

Cuando $t=h+1$, esta ecuación se convierte en

$$\sigma_{h+2}^2 = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1)\sigma_{h+1}^2 + \alpha_1\sigma_{h+1}^2(\varepsilon_{h+1}^2 - 1).$$

Ya que $E(\varepsilon_{h+1}^2 | \Omega_h) = 1$, la predicción de la volatilidad dos periodos hacia adelante es

$$\sigma_h^2(2) = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1)\sigma_h^2(1).$$

En general,

$$\sigma_h^2(\ell) = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1)\sigma_h^2(\ell - 1), \ell > 1. \quad (8)$$

Por sustituciones sucesivas en (8) se tiene que:

$$\sigma_h^2(\ell) = \frac{\alpha_0 [1 - (\alpha_1 + \beta_1)^{\ell-1}]}{1 - (\alpha_1 + \beta_1)} + (\alpha_1 + \beta_1)^{\ell-1} \sigma_h^2(1) \xrightarrow{\ell \rightarrow \infty} \frac{\alpha_0}{1 - (\alpha_1 + \beta_1)}.$$

Ejemplo: Rendimientos del FTSE 100.

Estimación de un GARCH(1,1):

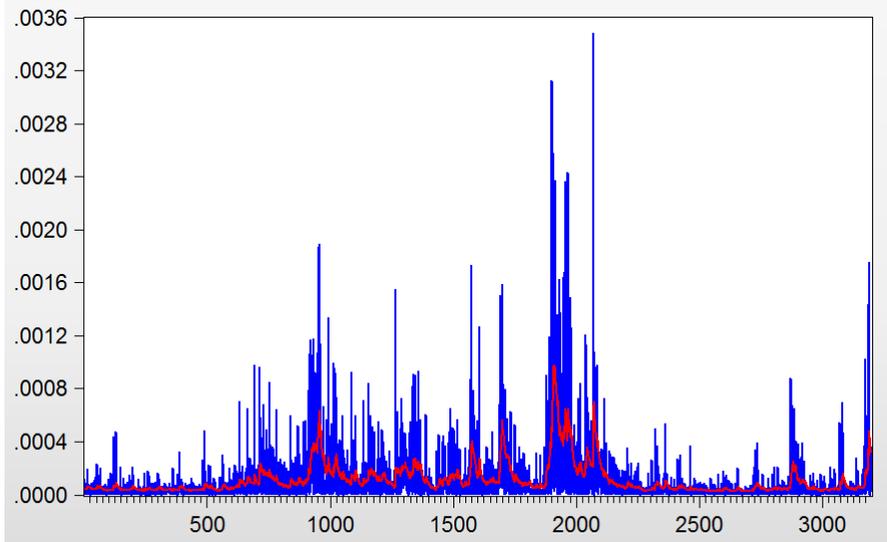
Dependent Variable: R
Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution
Date: 11/20/16 Time: 21:41
Sample (adjusted): 2 3197
Included observations: 3196 after adjustments
Convergence achieved after 8 iterations
Presample variance: backcast (parameter = 0.7)
GARCH = C(2) + C(3)*RESID(-1)^2 + C(4)*GARCH(-1)

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	0.000457	0.000140	3.257311	0.0011
Variance Equation				
C	9.92E-07	2.52E-07	3.944389	0.0001
RESID(-1)^2	0.083497	0.008900	9.381445	0.0000
GARCH(-1)	0.908452	0.009461	96.02570	0.0000
R-squared	-0.000505	Mean dependent var		0.000217
Adjusted R-squared	-0.000505	S.D. dependent var		0.010683
S.E. of regression	0.010686	Akaike info criterion		-6.575709
Sum squared resid	0.364806	Schwarz criterion		-6.568112
Log likelihood	10511.98	Hannan-Quinn criter.		-6.572985
Durbin-Watson stat	2.016354			

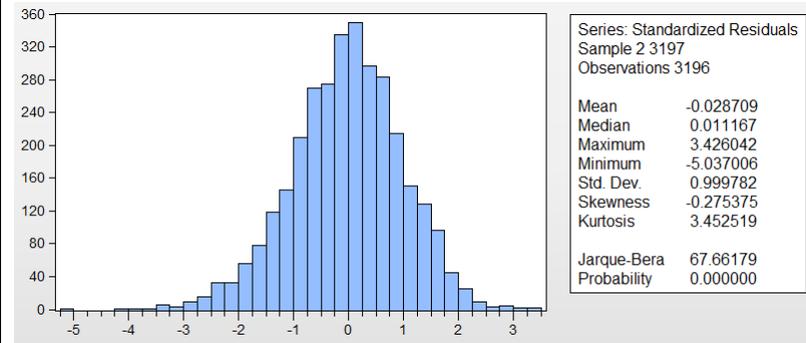
Correlograma de los residuos y de los residuos al cuadrado

Sample: 1 3197 Included observations: 3196							Sample: 1 3197 Included observations: 3196						
Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob*		Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob*	
		1	0.006	0.006	0.1087	0.742			1	-0.000	-0.000	0.0002	0.990
		2	-0.018	-0.018	1.1623	0.559			2	0.014	0.014	0.6280	0.731
		3	-0.038	-0.038	5.8003	0.122			3	0.016	0.016	1.4749	0.688
		4	-0.007	-0.007	5.9545	0.203			4	-0.007	-0.007	1.6425	0.801
		5	-0.024	-0.025	7.7712	0.169			5	0.006	0.006	1.7614	0.881
		6	-0.023	-0.024	9.4035	0.152			6	0.009	0.008	1.9949	0.920
		7	-0.022	-0.023	10.938	0.141			7	0.005	0.006	2.0902	0.955
		8	-0.000	-0.003	10.939	0.205			8	0.032	0.032	5.4554	0.708
		9	0.014	0.011	11.565	0.239			9	-0.031	-0.032	8.5736	0.478
		10	-0.000	-0.003	11.566	0.315			10	0.023	0.022	10.260	0.418
		11	0.017	0.016	12.533	0.325			11	0.030	0.030	13.202	0.280
		12	0.004	0.004	12.594	0.399			12	-0.011	-0.010	13.599	0.327
		13	0.007	0.006	12.742	0.468			13	-0.029	-0.031	16.250	0.236
		14	-0.043	-0.042	18.816	0.172			14	-0.031	-0.031	19.258	0.155
		15	0.004	0.006	18.878	0.219			15	0.005	0.006	19.326	0.199
		16	-0.013	-0.013	19.459	0.246			16	-0.002	-0.002	19.339	0.251
		17	-0.014	-0.016	20.079	0.270			17	-0.011	-0.010	19.752	0.287
		18	-0.011	-0.011	20.472	0.307			18	0.008	0.005	19.947	0.336
		19	-0.008	-0.011	20.664	0.356			19	-0.011	-0.010	20.336	0.375
		20	0.006	0.002	20.778	0.410			20	-0.011	-0.008	20.754	0.412
		21	-0.012	-0.016	21.236	0.445			21	-0.011	-0.011	21.177	0.448
		22	0.014	0.012	21.840	0.469			22	-0.001	-0.001	21.182	0.509
		23	-0.020	-0.022	23.181	0.450			23	-0.001	-0.000	21.185	0.570
		24	-0.018	-0.020	24.189	0.451			24	0.005	0.009	21.253	0.624
		25	0.015	0.016	24.898	0.468			25	0.004	0.006	21.315	0.675
		26	0.014	0.011	25.540	0.489			26	-0.001	-0.004	21.318	0.725
		27	-0.024	-0.024	27.324	0.446			27	0.009	0.009	21.583	0.758
		28	0.012	0.011	27.785	0.476			28	0.001	0.001	21.585	0.800
		29	-0.015	-0.015	28.492	0.492			29	-0.016	-0.016	22.455	0.801
		30	0.042	0.040	34.193	0.273			30	0.013	0.012	22.961	0.817
		31	-0.019	-0.021	35.326	0.271			31	0.008	0.009	23.169	0.843
		32	0.001	0.002	35.327	0.314			32	-0.000	-0.000	23.170	0.873
		33	-0.010	-0.009	35.654	0.345			33	0.003	0.001	23.202	0.897
		34	0.012	0.010	36.120	0.370			34	0.015	0.014	23.900	0.901
		35	0.005	0.005	36.207	0.412			35	0.002	0.000	23.913	0.922
		36	-0.001	0.000	36.209	0.459			36	0.010	0.010	24.231	0.932

Rendimientos al cuadrado y volatilidad estimada

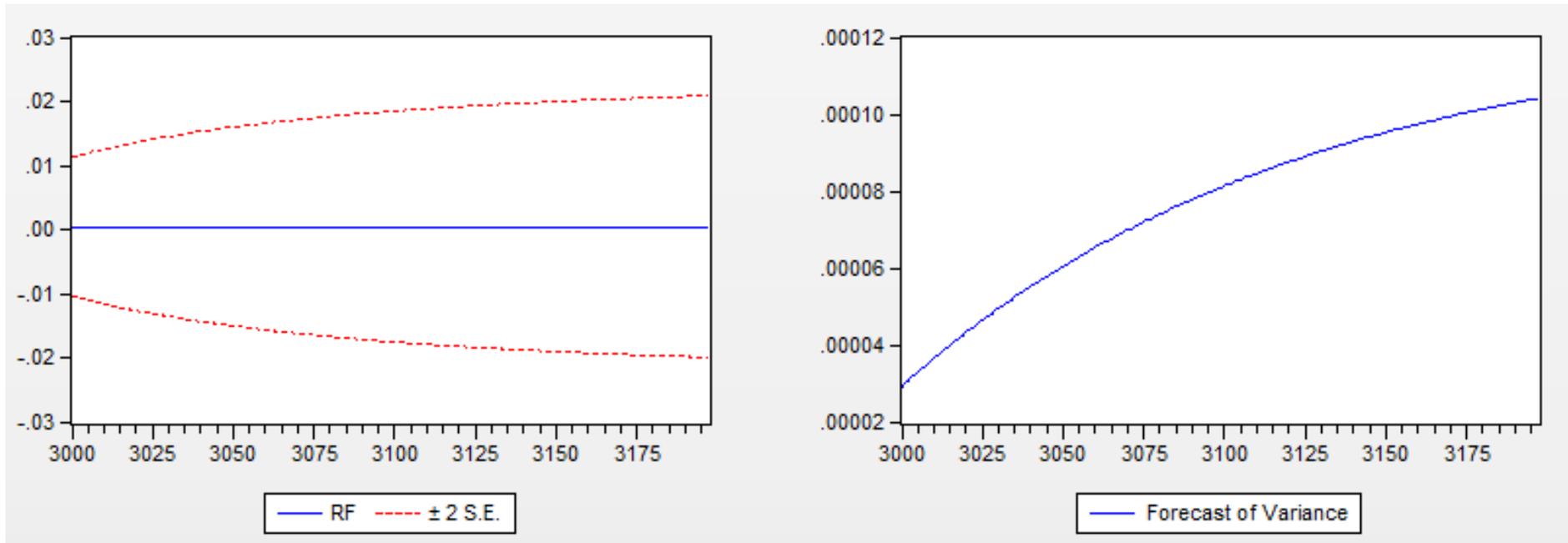


Histograma de los residuos



En azul los rendimientos al cuadrado; en rojo la varianza condicional estimada.

Predicción para la media y la varianza de los últimos 197 datos:



Volatilidad condicional estimada del ARCH(9) (en azul) y del GARCH(1,1) (en rojo)

